

# Halbleiterbauelemente

## Übungsserie 2: *Lösungen*

28. März 2011

### 1. Allgemeine Verständnisfragen zur Quantenmechanik

(a) Schrödingergleichung:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{r}, t) \right) \Psi(\underline{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\underline{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

- $\hbar$ : reduzierte Planck-Konstante
- $m$ : Teilchenmasse
- $\Delta$ : Laplace-Operator
- $\Psi$ : Wellenfunktion
- $V$ : Potential
- $i$ :  $\sqrt{-1}$
- $t$ : Zeit

(b) Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte:

$$w(\underline{r}, t) = |\Psi(\underline{r}, t)|^2. \quad (2)$$

Mittelwert der kinetischen Energie:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = - \int_V \Psi^*(\underline{r}, t) \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\underline{r}, t) dV. \quad (3)$$

- (c) Eine physikalische Grösse ist dann quantisiert, wenn sie (im Gegensatz zur klassischen Physik) nur ausschliesslich oder teilweise diskrete Werte annehmen kann.
- (d) Ein Teilchen kann eine endliche Potentialbarriere überwinden, auch wenn dessen Energie geringer als die Barrierenhöhe ist.
- (e) Aufgrund des Pauli-Prinzips.
- (f) Fermi-Dirac-Verteilung:

$$f_e(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}. \quad (4)$$

Skizze im Skript S. 103.

- (g) Das Fehlen eines Elektrons im Valenzband wird als Quasiteilchen betrachtet.  
 (h) Fermi-Dirac-Verteilung

$$f_h(E) = 1 - f_e(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_F - E}{kT}}}. \quad (5)$$

## 2. Das Kronig-Penny Modell

- (a) Bloch-Theorem für ein von links nach rechts propagierendes Teilchen:

$$\Psi_k(x) = u_k(x)e^{ik_x x}, \quad (6)$$

wobei  $u_k(x + a + b) = u_k(x)$ . Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist durch  $w(x) = |\Psi(\underline{r})|^2 = |u_k(x)|^2$  gegeben, bleibt also aufgrund der Periodizität in jedem Potentialtopf gleich. Damit ist die Tunnelwahrscheinlichkeit 1. Bei der nicht-periodischen Potentialbarriere aus Serie 1 ist dies nicht der Fall. Klassisch würde das Teilchen nur dann über die Barrieren kommen, wenn seine Energie höher ist als die Potentialbarrieren.

- (b)

$$\cos(ak_x) = \frac{mV_0ab \sin(\alpha a)}{\hbar^2 \alpha a} + \cos(\alpha a) = f(\alpha a) \quad (7)$$

Herleitung siehe Skript Seite 69 - 73. Gleichung (7) definiert die Energiebänder im Kronig-Penney Modell. Energiebänder sind die Dispersionrelationen in den zusammenhängenden Energieintervallen, innerhalb derer Gleichung (7) reel erfüllt werden kann. Die Bandweite des Energiebandes ist das zugehörige Energieintervall.

- (c) Bei Variation von  $a$  verändert sich die Grösse der Brillouinzone, welche durch  $\frac{\pi}{a}$  gegeben ist. Es folgt  $3 \rightarrow d$ ,  $2 \rightarrow f$ . Bei Vergrößerung von  $V_0$  wird der Wertebereich für  $\alpha$ , indem  $f(\alpha, a)$  zwischen -1 und 1 liegt immer kleiner. D.h. die Bandbreite wird kleiner. Die Lage der Bänder ändert sich jedoch nicht. Es folgt:  $6 \rightarrow b$ ,  $4 \rightarrow c$  und  $5 \rightarrow e$ .
- (d) Im folgenden matlab code werden der Energiewert 8142 meV sowie die Parameter des Bildes 1 (a) mit den drei verschiedenen Einheiten nacheinander in die rechte Seite von Gleichung (7) eingesetzt. Lediglich bei  $10^{-10}m$  (Å) ergibt sich ein Wert zwischen -1 und 1, sodass die Einheit Å ist.

```
>> echarge = 1.602176487*10^(-19);
V0 = 500*echarge;
emass = 9.10938215*10^(-31);
hbar = 1.054571628*10^(-34);
Energy = 8142*10^(-3)*echarge;
alpha = sqrt(2*emass*Energy/(hbar^2));
Scale = 10^(-10)
a = 4.99*Scale;
b = 0.01*Scale;
```

```
%f(alpha a)
emass*V0*a*b/(hbar^2) * sin(alpha*a)/(alpha*a) + cos(alpha*a)
```

```
ans =
```

```
0.911077924211482
```

```
Scale = 10^(-9)
a = 4.99*Scale;
b = 0.01*Scale;
```

```
%f(alpha a)
emass*V0*a*b/(hbar^2) * sin(alpha*a)/(alpha*a) + cos(alpha*a)
```

```
ans =
```

```
-3.628139739588771
```

```
Scale = 10^(-6)
a = 4.99*Scale;
b = 0.01*Scale;
```

```
%f(alpha a)
emass*V0*a*b/(hbar^2) * sin(alpha*a)/(alpha*a) + cos(alpha*a)
```

```
ans =
```

```
-4.259052524346016e+03
```

- (e) Die Fermienergie ist bei Temperatur  $T = 0$  K die Energiegrenze bis zu der die Teilchen aufgrund des Pauliprinzip Energiezustände besetzen. Die Fermienergie hängt von der Bandstruktur ab.

$$n = \int_0^{E_F} g(E) dE \quad (8)$$

- (f) Das Fermienergielevel befindet sich genau in der Mitte zwischen dem 2. und 3. Band.  
(g) Seite 84 im Skript.